第 39 卷 第 6 期
2022 年 12 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 39 No. 6
Dec. 2022

ChinaXiv合作期刊

文章编号:1000-4939(2022)06-1030-08

挠性航天器非约束模态动力学模型的降阶研究

韦志东,戈新生

(北京信息科技大学 机电工程学院,100192 北京)

摘　要:针对中心刚体-挠性附件的挠性航天器,应用拉格朗日方程推导出动力学模型,再利用模态展开法得到非约束模态动力学方程,然后分别基于模态价值分析准则和内平衡降阶准则的相关理论探讨模型降阶。通过模态价值分析准则能够显示出各阶模态占系统总价值的份额,保留贡献较多的模态组成降阶系统。内平衡降阶准则通过非奇异线性变换,将系统模型转换为内平衡系统,在内平衡系统内舍掉 Gram 矩阵对角线上较小的值所对应的模态以构成降阶系统。最后,利用数值仿真对中心刚体-单侧挠性梁航天器的非约束模态动力学模型进行模型降阶,通过两种准则对系统模型降阶数值计算,结果表明两种降阶准则均能够有效地对原系统进行模型降阶。

关键词:挠性航天器;非约束模态;模型降阶;模态价值分析准则;内平衡降阶准则

中图分类号:V414.3+3　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2022.06.004

Modal reduction analysis of unconstrained modal dynamic of large flexible spacecraft

WEI Zhidong, GE Xinsheng

(Mechanical Electrical Engineering School, Beijing Information Science & Technology University, 100192 Beijing, China)

Abstract: A dynamical model was derived by using Lagrange equation for a spacecraft with a center rigid body and a single large flexible structure, and then the unconstrained modal dynamic equation was developed by modal expansion. The relevant theoretical knowledge of modal cost analysis criterion and internal balance technique was introduced to solve model reduction. Modal cost analysis approximation formula to solve a weak damping and sufficiently separated from natural frequency in system was given in this paper. Modal cost analysis criterion could show the share of each modal in the total value of the system, and the reduced order system was composed of the modes with more contributions. Internal balance technique meaning the state space system was converted to internal balance system by non-singular linear transformation. The reduced order system was constructed according to discard the modes corresponding to the values on the diagonal Gram matrixes of the internal balance system. Finally, numerical simulation was applied to reduce the order of the unconstrained modal dynamics model of the spacecraft with central rigid body and a single flexible beam. The numerical calculation of the reduction of the system model by two criteria shows that the original system is effectively reduced.

chinaXiv:202212.00132v1

收稿日期:2022-06-13　　**修回日期**:2022-09-14
基金项目:国家自然科学基金重点项目(No. 11732005)
通信作者:戈新生。E-mail:gebim@vip.sina.com
引用格式:韦志东,戈新生. 挠性航天器非约束模态动力学模型的降阶研究[J]. 应用力学学报,2022,39(6):1030-1037.
WEI Zhidong, GE Xinsheng. Modal reduction analysis of unconstrained modal dynamic of large flexible spacecraft[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(6):1030-1037.

ChinaXiv合作期刊

Key words: flexible spacecraft; unconstrained modal; model reduction; modal cost analysis criterion; internal balance technique

随着航天科技不断发展,大挠性结构航天器动力学模型[1-2]成为大家普遍关注的问题。早期挠性航天器大多都是中心刚体的惯量比挠性附件惯量大许多,建模时通常将中心刚体视为静止不动。当挠性航天器中心刚体的惯量与挠性结构的惯量比值相接近时,挠性结构如果继续采用悬臂状态的传统方法对大挠性结构的航天器进行动力学分析,将会产生偏差[3]。针对大挠性航天器,Wang 等[4]采用有限元法及拉格朗日法建立了大挠性航天器的姿态动力学方程。周志成等[5]采用有限元法描述了柔性臂杆和太阳翼,通过拉格朗日法推导了柔性组合航天器的动力学方程。非约束模态定义为中心刚体不固定,整个航天器无阻尼的自由振动过程。文献[6-8]推导了非约束模态动量系数的恒等式关系,并给出挠性航天器非约束模态动力学方程。Hablani[9]描述了非约束模态为不存在外力和阻尼的情况下,航天器的自由振动过程,且推导了非约束模态的正交性。吕旺等[10]给出了挠性航天器在轨的非约束动力学模型,得到了非约束模态频率一般大于约束模态频率的结果,其原因是与约束模态相比,非约束模态相当于降低了约束,使挠性附件振动更加自由,因此频率升高,特别是在模态基频上比较明显。文献[11-12]采用哈密顿原理推导了挠性航天器动力学方程,并给出了航天器系统非约束模态振型的正交性和求解非约束模态振型的方法。用约束模态法和非约束模态法[13-16]对比研究了挠性航天器建模相关问题,并讨论了约束模态频率和非约束模态频率的计算误差相关问题。

针对挠性结构航天器,由于挠性结构的引入使得动力学模型的自由度变得很大,而主动控制设计的实现则需要系统模型的阶数尽可能的低,这就需要对模型进行降阶处理,用低阶模型近似代替原高阶模型。模型降阶方法通常采用以下 3 种降阶准则:惯性完备性准则[17-18]根据约束模态惯性完备性恒等式计算各阶模态的模态质量和转动惯量,通过忽略各阶模态质量和惯量对系统影响较小的模态,从而达到模态截断效果,该方法理论发展成熟、降阶较为方便,常用于建模初期;模态价值分析准则[19-21]需要计算系统各阶模态的模态价值,各阶模态的模态价值大小一般有数量级的差异,只有其中一两个模态起重要作用,该方法物理意义明确,使用范围广,形式简洁,是与控制目标结合起来一种广泛用于各种挠性结构的降阶方法,其降阶效果已得到了验证;内平衡降阶准则[22-25]是通过将动力学模型转换到状态空间系统,再将状态空间系统转换为内平衡系统,在该系统内通过舍掉 Gram 对角阵对角线上较小的值所对应的模态,从而达到模态截断效果。

本研究针对非约束模态动力学模型进行降价分析,计算其非约束模态频率,应用模态价值降阶准则和内平衡降阶准则对非约束模态动力学模型进行模型降阶。通过对非约束模态动力学模型降阶数值仿真,仿真实验表明无论是模态价值降阶准则或内平衡降阶准则与原系统相比较都能起到了较好的降阶效果。

1 动力学方程

考察中心刚体带单侧挠性梁,如图 1 所示,建立惯性系 $oxyz$ 和附件坐标系 $o_ix_iy_iz_i$, oz 和 o_iz_i 垂直纸面向外。$o_ix_iy_iz_i$ 的原点在中心刚体和挠性梁的连接点 o_i 上,$oxyz$ 的原点在系统的质心 o 上,假设 oy 轴方向的位移为 y_a,绕 oz 轴的转动角度为 θ_a,附件坐标系下挠性梁上任意一点 A 在 o_ix_i 轴上的坐标为 x_i,梁的挠度为 $w(x_i,t)$,点 A 在 ox 轴上的坐标为 x_0。系统质心 o 到中心刚体和挠性梁的连接点 o_i 的距离为 r_0,质心 C 为中心刚体的质心。本研究仅考虑挠性梁的横向振动,不考虑其扭转振动与伸缩振动。

在惯性系下梁的挠度 $\tilde{w}(x_i,t)$ 为

$$\tilde{w}(x_i,t) = y_a + x_0\theta_a + \begin{cases} 0, x_0 \leqslant r_0 \\ w(x_i,t), x_0 > r_0 \end{cases} \tag{1}$$

挠性梁任意一点的挠度用模态展开为

$$w(x_i,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x_i)\boldsymbol{\eta}_k(t) = \boldsymbol{\Phi}(x_i)\boldsymbol{\eta}(t) \tag{2}$$

其中:$\varphi_k(x_i)$ 为挠性梁的第 k 阶非约束模态阵型;$\boldsymbol{\eta}_k(t)$ 为挠性梁的第 k 阶模态坐标。

在惯性系下的速度表示为

$$v(x_i,t) = \dot{\tilde{w}}(x_i,t) = \dot{y}_a + x_0\dot{\theta}_a + \begin{cases} 0, x_0 \leqslant r_0 \\ \dot{w}(x_i,t), x_0 > r_0 \end{cases} \tag{3}$$

系统动能可写为

chinaXiv:202112.00132v1

ChinaXiv合作期刊

$$T = T_r + T_i \tag{4}$$

其中 T_r 表示为中心刚体的动能。

$$T_r = \frac{1}{2}\int (\dot{y}_a + x_0\dot{\theta}_a)(\dot{y}_a + x_0\dot{\theta}_a)\mathrm{d}m_r \tag{5}$$

其中 T_i 表示为挠性梁的动能,且

$$T_i = \frac{1}{2}\int (\dot{y}_a + x_0\dot{\theta}_a + \dot{w}(x_i,t))^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{y}_a + x_0\dot{\theta}_a + \dot{w}(x_i,t))\mathrm{d}m_i \tag{6}$$

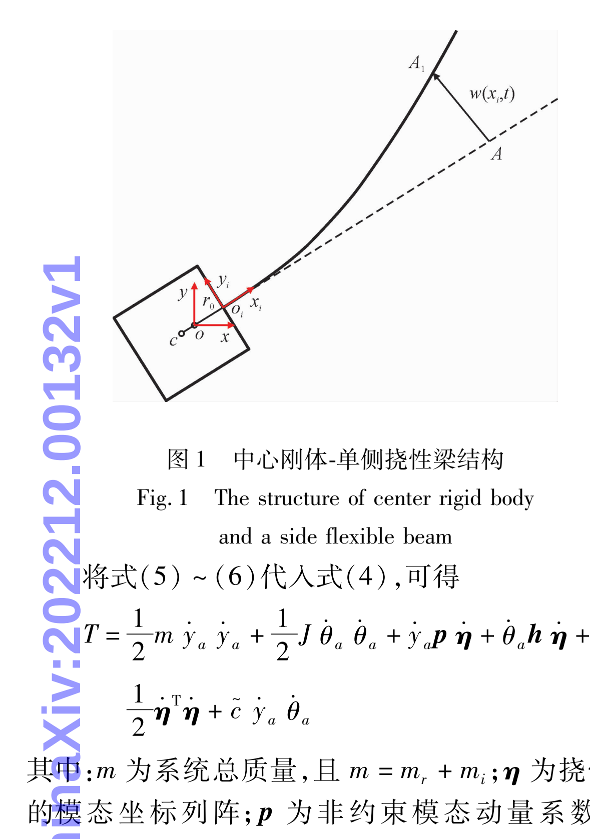


图 1 中心刚体-单侧挠性梁结构

Fig. 1 The structure of center rigid body and a side flexible beam

将式(5)~(6)代入式(4),可得

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}_a\dot{y}_a + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_a\dot{\theta}_a + \dot{y}_a\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\theta}_a\boldsymbol{h}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{c}\dot{y}_a\dot{\theta}_a \tag{7}$$

其中:m 为系统总质量,且 $m = m_r + m_i$;$\boldsymbol{\eta}$ 为挠性梁的模态坐标列阵;$\boldsymbol{p}$ 为非约束模态动量系数,且 $\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}m_i$;$\boldsymbol{h}$ 为非约束模态角动量系数,且 $\boldsymbol{h} = \int \tilde{x}_0\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}m_i$;$J$ 为相对于系统质心 o 的转动惯量,表示为 $J = J_r + J_i$;$\tilde{c}_i$、$\tilde{c}_r$ 分别为挠性梁和中心刚体相对质心 C 的静矩,且 $\tilde{c} = \tilde{c}_r + \tilde{c}_i = \int \tilde{x}_0\mathrm{d}m_r + \int \tilde{x}_0\mathrm{d}m_i = \int \tilde{x}_0\mathrm{d}m$。

航天器势能为挠性梁的变形势能,即

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}(x_i)\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{\eta} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为挠性梁固有频率组成的对角阵。

根据 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = \boldsymbol{R} \tag{9}$$

其中:$\boldsymbol{q}$ 为广义坐标列向量,且 $\boldsymbol{q} = [y_a \quad \theta_a \quad \boldsymbol{\eta}]^{\mathrm{T}}$;$L = T - V$ 为 Lagrange 函数;设广义力 $\boldsymbol{R}$ 的分力 F、T、$\boldsymbol{f}$ 分别为外力、外力矩和模态力,$\boldsymbol{R} = [F \quad T \quad \boldsymbol{f}]^{\mathrm{T}}$。将式(7)~(8)代入式(9)可得系统的动力学方程为

$$\begin{cases} m\ddot{y}_a + \tilde{c}\ddot{\theta}_a + \boldsymbol{p}\ddot{\boldsymbol{\eta}} = F \\ \tilde{c}\ddot{y}_a + J\ddot{\theta}_a + \boldsymbol{h}\ddot{\boldsymbol{\eta}} = T \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\ddot{y}_a + \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\ddot{\theta}_a = \boldsymbol{f} \end{cases} \tag{10}$$

将方程式(10)写成矩阵形式,即

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{R} \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & \tilde{c} & \boldsymbol{p} \\ \tilde{c} & J & \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \boldsymbol{\Lambda}^2 \end{bmatrix}$$

2 模型降阶准则

模态价值分析准则和内平衡降阶准则在各种航天器挠性结构模型降阶研究中已得到了验证。现简要介绍两种准则的相关理论。

将动力学方程式(11)的响应输出方程以位移坐标和速率表示为

$$\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{q} + \bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{r}}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{12}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{d}}$、$\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{r}}$ 分别为位移、速率观测矩阵。

对方程式(11)添加阻尼项后与方程式(12)联立,可得系统广义的动力学方程,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}\dot{\boldsymbol{q}} \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{K}$ 为系统质量、阻尼、刚度矩阵,且 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} > 0$,$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \geqslant 0$,$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \geqslant 0$;$\boldsymbol{u}$ 为系统的输入或外界干扰;$\bar{\boldsymbol{B}}$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的分布矩阵。

2.1 模态价值分析准则

模态价值分析是通过计算系统中各阶模态的模态价值和各阶模态价值占系统总价值的比例的多少来对模态的取舍,保留贡献较多的模态组成降阶系统,从而实现对系统进行模型降阶。

采用正则模态矩阵 $\boldsymbol{T}$,将方程式(13)转换到模态坐标空间,即

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathrm{diag}\{2\zeta_i\omega_i\}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathrm{diag}\{\omega_i^2\}\boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}\dot{\boldsymbol{\eta}} \end{cases} \tag{14}$$

其中:ω_i、ζ_i 分别为第 i 阶非约束模态频率和阻尼

chinaXiv:202212.00132v1

ChinaXiv合作期刊

比；$\hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}$、$\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}=\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}=\bar{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{T}$。再将方程式(14)转换到状态空间，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{x}=(\dot{\eta}_1,\omega_1\eta_1,\cdots,\dot{\eta}_n,\omega_n\eta_n)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_i),\boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix}-2\omega_i\zeta_i & -\omega_i\\ \omega_i & 0\end{bmatrix};\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}},$$

$\cdots,\boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}}]$，$\boldsymbol{B}_i=[b_i\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$b_i$ 是 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 的第 i 行；$\boldsymbol{C}=[C_1,C_{\mathrm{d1}}/\omega_1,\cdots,C_n,C_{\mathrm{d}n}/\omega_n]$。

由方程式(15)可知，系统的第 i 阶模态价值数值解为[17]

$$V_i=\mathrm{tr}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}]_{ii}\tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为权矩阵；$\boldsymbol{X}$ 为状态协方差矩阵，其满足 Lyapunov 方程的解，即

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=0\tag{17}$$

系统总价值 V 为各阶模态价值之和，即

$$V=\sum_{i=1}^{n}V_i\tag{18}$$

各阶模态价值占系统总价值的比例为

$$(\boldsymbol{MQI})_i=V_i/V\tag{19}$$

2.2　内平衡降阶准则

内平衡准则实际上是将状态空间系统变换到内平衡系统，使得内平衡系统的可控可观 Gram 矩阵具有对角阵结构，从而保留该系统内可控可观 Gram 矩阵对角线上较大的值(即奇异值 σ_i)对应的模态以构成降阶系统，从而实现对系统进行模型降阶。

方程式(15)的可控和可观 Gram 矩阵分别为 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{c}}$、$\boldsymbol{W}_{\mathrm{o}}$，可由 Lyapunov 方程得[22]

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{W}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=0\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{o}}+\boldsymbol{W}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=0\end{cases}\tag{20}$$

设非奇异线性变换，即

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}\bar{\boldsymbol{x}}\tag{21}$$

将方程式(21)代入方程式(15)系统，可得内平衡系统为

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{22}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}$，$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{-1}\boldsymbol{B}$，$\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}$。

此时该系统 Gram 矩阵 $\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}$、$\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{o}}$ 满足

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}=\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{o}}=\mathrm{diag}\{\sigma_i\}\tag{23}$$

由方程式(20)可知，可控 Gram 矩阵 $\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}$ 满足[22]

$$\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}+\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}=0\tag{24}$$

将式(24)左乘矩阵 $\boldsymbol{T}$，右乘矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$，同时将 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}$，$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{-1}\boldsymbol{B}$，$\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}$ 代入，可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=0\tag{25}$$

令 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}}$，即 $\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{-1}\boldsymbol{W}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{-1})^{\mathrm{T}}$，同理可导出可观 Gram 矩阵，即

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{o}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}\tag{26}$$

将可观可控 Gram 矩阵 $\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}$、$\bar{\boldsymbol{W}}_{o}$ 相乘，得

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{c}}\bar{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{o}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}^{-1}(\boldsymbol{W}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{o}})\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}\tag{27}$$

可知，矩阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{b}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{o}}$ 的特征向量，系统的特征值为 Hankel 奇异值 σ_i^2。

3　数值仿真

如图 1 所示，考察中心刚体带单侧挠性梁，中心刚体为盒型立方体，边长为 1.0 m，其他材料参数[17]和挠性梁[17]的材料参数如表 1 所示。

表 1　中心刚体和挠性梁材料参数

Tab. 1　Material parameters of center rigid body and flexible beam

中心刚体		挠性梁	
参数	值	参数	值
密度/(kg·m^{-3})	7 800	密度/(kg·m^{-3})	920
质量/kg	231.67	质量/kg	5.21
弹性模量/Pa	2.0×10^{11}	弹性模量/Pa	2.6×10^{11}
泊松比	0.3	泊松比	0.3
惯量/(kg·m^2)	diag{63.71 63.71 63.71}	惯量/(kg·m^2)	diag{40.94 0.42 41.36}
刚体壁厚/m	0.005	长/宽/厚/m	4/1/0.015

分别采用模态价值分析准则和内平衡准则验证挠性航天器模型降阶的有效性和可行性。假设挠性梁的自由端端点分别受到脉冲激励和正弦激励响应。梁端点的初始位移为 0.01 m，初始速度为 0，撤除激励后挠性梁做自由衰减振动。分别求得非约束模态平动耦合系数和转动耦合系数(表 2 ~ 3)、挠性梁的约束模态频率 ω_1 和由方程式(11)计算的系统非约束模态频率 ω_2(表 4)。

chinaXiv:202212.00132v1

ChinaXiv合作期刊

表 2 系统前 10 阶非约束模态平动耦合系数 p_{jn}

Tab. 2 Translational coupling coefficient p_{jn} of unconstrained mode of the 1st to 10th of flexible spacecraft system

j	$p(j,x)/\mathrm{kg}^{1/2}$	$p(j,y)/\mathrm{kg}^{1/2}$	$p(j,z)/\mathrm{kg}^{1/2}$
1	-0.5998×10^{-2}	0.1831×10^{-3}	1.1300
2	-0.2034×10^{-3}	0.2864×10^{-2}	−0.6821
3	0.2227×10^{-3}	-0.8948×10^{-4}	−0.0338
4	-0.6334×10^{-5}	-0.1202×10^{-2}	0.5148
5	-0.3888×10^{-3}	-0.1177×10^{-4}	-0.7011×10^{-2}
6	0.2719×10^{-4}	0.7202×10^{-3}	−0.2006
7	0.1806×10^{-3}	0.2071×10^{-4}	0.0138
8	-0.4859×10^{-4}	-0.4874×10^{-3}	0.2859
9	-0.1121×10^{-3}	-0.1845×10^{-4}	0.0194
10	0.9671×10^{-4}	0.3428×10^{-3}	−0.1100

表 3 系统前 10 阶非约束模态转动耦合系数 h_{jn}

Tab. 3 Rotational coupling coefficient h_{jn} of unconstrained mode of the 1st to 10th of flexible spacecraft system

j	$h(j,x)/(\mathrm{kg\cdot m^2})^{1/2}$	$h(j,y)/(\mathrm{kg\cdot m^2})^{1/2}$	$h(j,z)/(\mathrm{kg\cdot m^2})^{1/2}$
1	3.7440	0.0109	0.2535×10^{-2}
2	−1.1870	−0.0428	0.3660×10^{-2}
3	0.0801	0.3322	0.6601×10^{-2}
4	1.0660	0.0160	-0.1639×10^{-2}
5	0.7253×10^{-2}	−0.2145	-0.5316×10^{-3}
6	−0.4050	−0.0190	0.5931×10^{-3}
7	−0.1028	0.0308	-0.7057×10^{-4}
8	0.8067	-0.8881×10^{-2}	-0.8643×10^{-3}
9	0.1687	−0.0605	-0.1070×10^{-3}
10	−0.3709	−0.0205	0.5412×10^{-3}

chinaXiv:202212.00132v1

3.1 脉冲激励响应

假定在挠性梁的自由端端点 X 方向受到脉冲力矩激励，仿真计算该端点 X 方向和 Y 方向的位移输出响应。取观测矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}$、控制力分布矩阵 $\boldsymbol{B}$、输出 $\boldsymbol{y}$ 中各分量相对重要性的权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和阻尼比 ζ 分别为[25]

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{0}_{3\times16},\boldsymbol{C}_{\mathrm{r}}=[\boldsymbol{0}_{3\times3}\ \vdots\ \boldsymbol{I}_{3\times3}\ \vdots\ \boldsymbol{0}_{3\times10}],$$

$$\boldsymbol{B}=[0\quad0\quad0\quad\vdots\quad1\quad0\quad0\quad\vdots\quad\boldsymbol{0}_{1\times10}],$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_{3\times3},\zeta=0.01$$

根据数值解式(16)计算得到模态价值，根据式(19)计算得到 MQI 值，结果如表 4 所示，并给出其柔性振动的前 10 阶模态作为梁原系统的真实响应。

表 4 脉冲激励下模态价值计算结果

Tab. 4 Results of modal cost analysis under impulse excitation

i	ω_1/Hz	ω_2/Hz	V	MQI
1	0.1934 5	0.2085	2.6481×10^{-4}	0.9973
2	1.3781	1.3906	5.7619×10^{-7}	0.0022
3	1.6479	1.6494	1.1629×10^{-11}	4.3794×10^{-8}
4	4.0587	4.0878	1.3504×10^{-7}	5.0855×10^{-4}
5	5.4160	5.4180	1.4914×10^{-16}	5.6165×10^{-13}
6	8.1624	8.1709	1.4503×10^{-9}	5.4618×10^{-6}
7	9.9986	9.9993	4.5741×10^{-12}	1.7226×10^{-8}
8	13.7077	13.7621	1.3648×10^{-8}	5.1398×10^{-5}
9	15.4739	15.4770	2.5793×10^{-11}	9.7135×10^{-8}
10	20.7316	20.7205	4.2334×10^{-10}	1.5943×10^{-6}

由表 4 可知，系统最大的模态价值是第 1 阶，其 MQI = 0.9973，达到总价值的 99.73%，对系统贡献最大，其他阶模态与第 1 阶模态相比 MQI 数值上有数量级的差异。故选择第 1 阶模态为模态价值降阶系统。

同时，利用方程式(15)进行内平衡降阶，计算得内平衡系统的奇异值为

$$\boldsymbol{\sigma}=[0.1782\quad0.1782\quad0.0032\quad0.0032\quad0.0009\quad0.0009\quad0.0002\quad0.0002\quad6.6442\times10^{-5}\quad6.6433\times10^{-5}\quad2.2557\times10^{-5}\quad2.2473\times10^{-5}\quad1.3125\times10^{-5}\quad1.3063\times10^{-5}\quad6.2664\times10^{-6}\quad6.2447\times10^{-6}\quad3.3285\times10^{-6}\quad3.3263\times10^{-6}\quad2.5973\times10^{-8}\quad2.5946\times10^{-8}]$$

由上述计算得到的奇异值可知，第 1 阶模态对应的两个奇异值最大，其他阶模态与第 1 阶模态相比数值上有数量级的差异。故取第 1 阶内平衡模态为内平衡降阶系统。

取输入为脉冲信号，脉冲强度为 10，周期为 0.01。利用非约束模态平动耦合系数、转动耦合系数和降阶准则进行数值仿真。原系统和降阶系统的响应如图 2 ~ 4 所示。从结果看出，降阶系统与原系统的响应吻合良好。

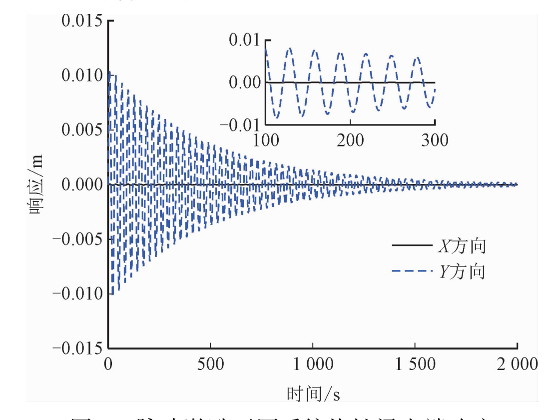


图 2 脉冲激励下原系统挠性梁末端响应

Fig. 2 Tip response of the flexible beam by using the original system under impulse excitation

ChinaXiv合作期刊

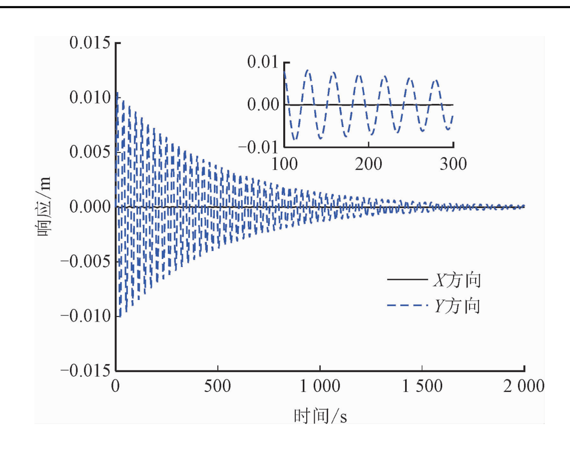


图 3　脉冲激励下模态价值降阶系统挠性梁末端响应

Fig. 3　Tip response of the flexible beam by using the modal cost analysis reduction system under impulse excitation

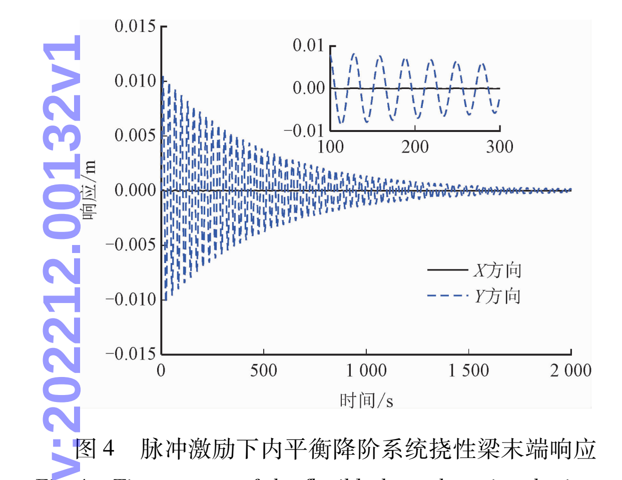


图 4　脉冲激励下内平衡降阶系统挠性梁末端响应

Fig. 4　Tip response of the flexible beam by using the internal balance technique reduction system under impulse excitation

chinaXiv:202212.00132v1

3.2　正弦激励响应

假设在挠性梁的自由端端点 Y 方向受到正弦力矩激励，仿真计算该端点 X 方向和 Y 方向的位移输出响应。取控制力分布矩阵 $\boldsymbol{B}$ 如下，其他数量保持不变，即

$$\boldsymbol{B}=[0\quad 0\quad 0\quad \vdots\quad 0\quad 1\quad 0\quad \vdots\quad \boldsymbol{0}_{1\times 10}]$$

表 5 采用数值解式（16）计算得模态价值结果。

从表 5 中可以看出，模态价值最大值出现在第 3 阶模态，其 MQI = 0.949 2，对系统贡献最大。故选择第 3 阶模态为模态价值降阶系统。

计算得内平衡系统奇异值为

$$\boldsymbol{\sigma}=[0.000\,4\quad 0.000\,4\quad 5.188\,5\times10^{-5}\quad 5.185\,3\times10^{-5}\quad 7.935\,2\times10^{-6}\quad 7.901\,6\times10^{-6}\quad 3.967\,2\times10^{-6}\quad 3.966\,8\times10^{-6}\quad 1.435\,8\times10^{-6}\quad 1.433\,6\times10^{-6}\quad 5.708\,6\times10^{-7}\quad 5.697\,4\times10^{-7}\quad 4.703\,8\times10^{-7}\quad 4.691\,5\times10^{-7}\quad 2.915\,4\times10^{-7}\quad 2.907\,4\times10^{-7}\quad 1.291\,6\times10^{-7}\quad 1.284\,5\times10^{-7}\quad 2.236\,9\times10^{-8}\quad 2.235\,3\times10^{-8}]$$

表 5　正弦激励下模态价值计算结果

Tab. 5　Results of modal cost analysis under sinusoidal excitation

i	ω_1/Hz	ω_2/Hz	V	MQI
1	0.193 5	0.208 5	$1.312\,7\times10^{-13}$	$1.133\,0\times10^{-5}$
2	1.378 1	1.390 6	$3.586\,1\times10^{-12}$	$3.095\,2\times10^{-4}$
3	1.647 9	1.649 4	$1.099\,7\times10^{-8}$	0.949 2
4	4.058 7	4.087 8	$3.658\,0\times10^{-14}$	$3.157\,2\times10^{-6}$
5	5.416 0	5.418 0	$5.839\,2\times10^{-10}$	0.050 4
6	8.162 4	8.170 9	$2.825\,6\times10^{-14}$	$2.438\,8\times10^{-6}$
7	9.998 6	9.999 3	$1.318\,4\times10^{-13}$	$1.137\,9\times10^{-5}$
8	13.707 7	13.762 1	$2.951\,4\times10^{-16}$	$2.547\,4\times10^{-8}$
9	15.473 9	15.477 0	$1.279\,0\times10^{-12}$	$1.103\,9\times10^{-4}$
10	20.731 6	20.720 5	$1.391\,4\times10^{-14}$	$1.200\,9\times10^{-6}$

由上述计算得到的奇异值可知，第 1 阶模态对应的两个奇异值最大，故取第 1 阶内平衡模态为内平衡降阶系统。

取输入为正弦外激励，其振幅为 2，频率为 1 rad/s。仿真所得到的原系统响应和降阶系统响应如图 5 ~ 7 所示。根据图 5 ~ 7 可知，降阶系统与原系统吻合良好，故两种准则均能够起到较好的降阶效果。

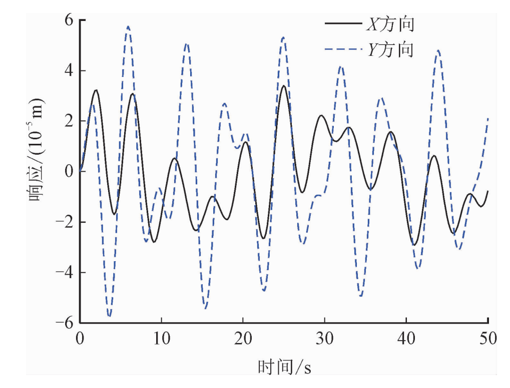


图 5　正弦激励下原系统挠性梁末端响应

Fig. 5　Tip response of the flexible beam by using the original system under sinusoidal excitation

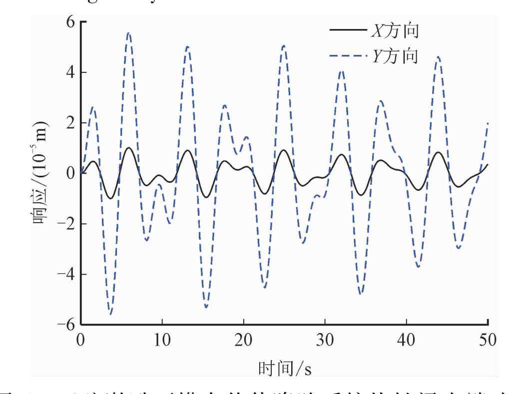


图 6　正弦激励下模态价值降阶系统挠性梁末端响应

Fig. 6　Tip response of the flexible beam by using the modal cost analysis reduction system under sinusoidal excitation

ChinaXiv合作期刊

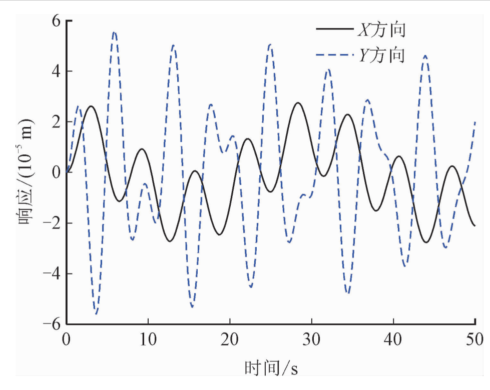


图 7 正弦激励下内平衡降阶系统挠性梁末端响应

Fig. 7 Tip response of the flexible beam by using the internal balance technique reduction system under sinusoidal excitation

4 结 论

本研究针对中心刚体-挠性梁模型的挠性航天器,通过非约束模态振型展开,得到非约束模态描述系统刚体运动和挠性变形的动力学方程。结合模态价值分析准则和内平衡降阶准则分析了挠性航天器模型降阶问题。模态价值分析准则讨论了各阶模态的模态价值对系统贡献的重要程度,因此可以保留对系统贡献较多的模态,从而组成降阶系统。内平衡降阶准则通过非奇异线性变换,将状态空间系统转化为内平衡系统,从而保留该系统内可控可观 Gram 对角矩阵对角线上较大的值所对应的模态来对系统进行模态截断,从而达到降阶效果。最后通过仿真实验验证了两个准则对非约束模态动力学模型降阶与截断的有效性,结果表明模态价值分析准则和内平衡降阶准则也能对非约束模态动力学模型进行有效地模型降阶和模态截断。

chinaXiv:202203.00032v1

参考文献:

[1] 陈士橹,祝小平,唐硕,等. 挠性航天器动力学的几个研究方向[J]. 世界科技研究与发展,1998,20(6):43-47.
CHEN Shilu, ZHU Xiaoping, TANG Shuo, et al. Some research fields in astrodynamics of flexible spacecraft[J]. World scientific and technological research and development,1998,20(6):43-47 (in Chinese).

[2] 曲广吉. 航天器动力学工程[M]. 北京:中国科学技术出版社,2000.

[3] 王建明,刘又午,洪嘉振. 大范围刚体运动对柔性梁模态形函数的影响分析[J]. 中国机械工程,2000,11(6):49-51.
WANG Jianming, LIU Youwu, HONG Jiazhen. Analysis on the mode shapes of flexible beams affected by large overall motion[J]. China mechanical engineering,2000,11(6):49-51(in Chinese).

[4] WANG P Y, LIU Z M, LI C J, et al. Time-fuel optimal trajectory based attitude maneuver control for flexible spacecraft[C]//Proceadings of International Conference on Instrumentation & Measurement, Computer, Communication and Control. Harbin:[s. n.], 2016:197-201.

[5] 周志成,王兴龙,曲广吉. 大型空间柔性组合航天器动力学建模与控制[J]. 中国科学:物理学 力学 天文学,2019,42(2):62-73.
ZHOU Zhicheng, WANG Xinglong, QU Guangji. Dynamic modeling and control of large flexible spacecraft combination[J]. Scientia Sinica physica, mechanica & astronomica,2019,42(2):62-73(in Chinese).

[6] HUGHES P C. Modal identities for elastic bodies, with application to vehicle dynamics and control[J]. Journal of applied mechanics, 1980,47:177-184.

[7] 徐小胜,于登云,曲广吉. 用于惯性完备性降价的模态恒等式研究[J]. 航天器工程,2003,12(2):23-34.
XU Xiaosheng, YU Dengyun, QU Guangji. Modal identity for inertia completeness reduction[J]. Spacecraft engineering,2003,12(2):23-34(in Chinese).

[8] 宋新宇,戈新生. 关于非约束模态惯性完备性准则的研究[C]//中国力学大会论文集. 杭州:中国力学大会,2019:1-9.

[9] HABLANI H B. Constrained and unconstrained modes: some modeling aspects of flexible spacecraft[J]. Journal of guidance, control and dynamics,1982,5(2):164-173.

[10] 吕旺,向明江,叶文郁,等. 挠性卫星在轨非约束模态计算研究[J]. 宇航学报,2014,35(4):404-409.
LÜ Wang, XIANG Mingjiang, YE Wenyu, et al. Research on calculation of on-orbit unconstrained modal of flexible satellite[J]. Journal of astronautics,2014,35(4):404-409(in Chinese).

[11] 袁秋帆,王超磊,齐乃明,等. 单翼大挠性航天器全局模态动力学建模及试验[J]. 宇航学报,2019,40(4):369-377.
YUAN Qiufan, WANG Chaolei, QI Naiming, et al. Global dynamic modeling for a spacecraft with single large flexible structure and experimental study[J]. Journal of astronautics,2019,40(4):369-377(in Chinese).

[12] LIU Lun, CAO Dengqing. Dynamic modeling for a flexible spacecraft with solar arrays composed of honeycomb panels and its proportional-derivative control with input shaper[J]. Journal of dynamic systems, measurement and control,2016,138(5):1 -11.

[13] CAO Y T, CAO D Q, HUANG W H. Nonlinear dynamic modeling and decoupling for rigid-flexible coupled of spacecraft with rapid maneuver[J]. Journal of mechanical engineering science,2019,14(233):4896-4913.

[14] 陕晋军,刘暾,齐乃明,等. 再谈一类挠性结构的约束及非约束模态解法[J]. 中国空间科学技术,2001,21(1):13-19.
SHAN Jinjun, LIU Tun, QI Naiming, et al. Re-discuss the solution of constrained and unconstrained mode for a kind of flexible structure[J]. Chinese space science and technology,2001,21(1):13-19(in Chinese).

[15] LIU L, CAO D Q. Rigid-flexible coupling dynamic modeling and vibration control for flexible spacecraft based on its global analytical

ChinaXiv合作期刊

modes[J]. Science China technological sciences, 2019, 62(4): 608-618.

[16] 赵宝山,赵志刚,王力平,等. 柔性臂约束/非约束模态降维模型精度分析[J]. 中国空间科学技术,2012,4(2):287-291.
ZHAO Baoshan, ZHAO Zhigang, WANG Liping, et al. The precision analysis of constrained and unconstrained mode dimension reduction model for flexible manipulator[J]. Chinese space science and technology, 2012, 4(3):287-291(in Chinese).

[17] 施高萍. 多柔体系统动力学模型的降阶研究[D]. 杭州:浙江工业大学,2004.

[18] 宋新宇,戈新生. 挠性航天器动力学模型的非约束模态分析[J]. 力学学报,2020,52(4):955-964.
SONG Xinyu, GE Xinsheng. Unconstrained modal analysis of dynamic model of flexible spacecraft[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2020, 52(4):955-964(in Chinese).

[19] SKELTON R E, GREGORY C Z. Measurement feedback and model reduction by modal cost analysis[C]//Proceedings of Joint Automatic Control Conference. Denver:[s. n.], 1979:211-218.

[20] 倪迎鸽,万小朋,赵美英. 模型降阶在折叠机翼主动控制中的应用研究[J]. 航天工程进展 2015,6(3):327-332.
NI Yingge, WAN Xiaopeng, ZHAO Meiying. Application of model reduction in active control of a folding wing[J]. Advances in aeronautical science and engineering, 2015, 6(3):327-322(in Chinese).

[21] 徐小胜,于登云,曲广吉. 模态价值分析在航天器模型降阶中的应用研究[J]. 中国空间科学技术,2003,6:4-9.
XU Xiaosheng, YU Dengyun, QU Guangji. Research on model reduction of flexible spacecraft using modal cost[J]. Chinese space science and technology, 2003, 6(4):4-9(in Chinese).

[22] MOORE B C. Principal component analysis in linear system: Controllability, observability and model reduction[J]. IEEE transactions on automatic control, 1981, 26(1):17-31.

[23] 李雪峰,王建国. 内平衡系统多目标最优模型降阶研究[J]. 系统仿真学报,2009,21(8):2135-2137.
LI Xuefeng, WANG Jianguo. Study of optimal model reduction with multi-object for internal balanced system[J]. Journal of system simulation, 2009, 21(8):2135-2137(in Chinese).

[24] 谢永,赵童,蔡国平. 柔性梁内平衡模型降阶于主动控制得实验研究[J]. 应用数学和力学,2011,32(8):946-954.
XIE Yong, ZHAO Tong, CAI Guoping. Model reduction and active control of a flexible beam using internal balance technique[J]. Applied mathematics and mechanics, 2011, 32(8):946-654(in Chinese).

[25] 章敏. 柔性结构的模型降阶与主动控制研究[D]. 上海:上海交通大学,2009.

（编辑　张璐）

chinaXiv:202212.00132v1

中国科学引文数据库(CSCD)来源期刊

收录证书

应用力学学报

依据文献计量学的理论和方法，通过定量与定性相结合的综合评审，贵刊被收录为**中国科学引文数据库(CSCD)来源期刊**，特颁发此证书。

证书编号：CSCD2021-0922
有 效 期：2021年-2022年
发证日期：2021年4月
查询网址：www.sciencechina.cn

